20.05.2021

TD 1.

Exercice 4.

- $K = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

En utilisant une intégration par partie

On pose : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Et on trouve,

$K = [-x^2 e^{-x}]_0^1 + 2\int_0^1 x e^{-x} dx$

$= -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 x e^{-x} dx$

Effectuant une 2ème intégration par partie

posons : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

On a alors.

$K = -\frac{1}{e} + 2\left([-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \right)$

$= -\frac{1}{e} + 2\left(-\frac{1}{e} + [-e^{-x}]_0^1 \right)$

$= -\frac{1}{e} + 2\left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \right)$

$= -\frac{5}{e} + 2$

Finalement, $\boxed{K = 2 - \frac{5}{e}}$

- $L = \int_0^a e^{\alpha x} \cos(\beta x)\, dx$

Posons : $\begin{cases} u(x) = e^{\alpha x} \\ v'(x) = \cos(\beta x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \alpha e^{\alpha x} \\ v(x) = \frac{1}{\beta}\sin(\beta x) \end{cases}$

En utilisant une intégration par partie.

On trouve,

$L = \left[\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin(\beta x)\right]_0^a - \frac{\alpha}{\beta}\int_0^a e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx$

Par une 2ème intégration par partie, ~~on~~ et en posant :

$\begin{cases} u(x) = e^{\alpha x} \\ v'(x) = \sin(\beta x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \alpha e^{\alpha x} \\ v(x) = -\frac{1}{\beta}\cos(\beta x) \end{cases}$

On trouve

$L = \left[\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin(\beta x)\right]_0^a - \frac{\alpha}{\beta}\left(\left[-\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos(\beta x)\right]_0^a + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^a e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx \right)$

On a alors

$L = \left[\frac{e^{\alpha x}}{\beta}\left(\sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta}\cos(\beta x)\right)\right]_0^a - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 L$

$L\left(1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) = \frac{e^{\alpha a}}{\beta}\left(\sin(\beta a) + \frac{\alpha}{\beta}\cos(\beta a)\right) - \frac{\alpha}{\beta^2}$

$\Leftrightarrow L\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2}\right) =$

$\Rightarrow L = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\left(\frac{e^{\alpha a}}{\beta}\left(\sin(\beta a) + \frac{\alpha}{\beta}\cos(\beta a)\right) - \frac{\alpha}{\beta^2}\right)$

- M d'après l'intégrale L.

Exercice 5

$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$

1) Calculons I_1

$I_1 = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$

$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2x) e^{-x^2} dx$

$= -\frac{1}{2}[e^{-x^2}]_0^1$

$= -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$

2) Montrons que :

$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e}$

En utilisant une intégration par partie, on pose.

$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = x e^{-x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1) x^n \\ v(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \end{cases}$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \geq 0$

$$g_n(t) = f(t/n).e^{-t}$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t}{n} = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = g(t) = f(0).e^{-t}$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \geq 0$

$|g_n(t)| \leq M e^{-t} = h(t)$ avec h est une fct positive et intégrable sur $[0,+\infty[$

Par suite, d'après le th de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt$$
$$= f(0)\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$$
$$= f(0)\,[-e^{-t}]_0^{+\infty}$$
$$= f(0)$$

- $K_n = \int_0^{+\infty} \frac{n f(x)}{1+n^2x^2}\,dx$

changement de variable $x = nt$

c'est la m chose de I_n.

$$= \int_0^{+\infty} \frac{f(t/n)}{1+t^2}\,dt.$$

Exercice 3

1) Montrer que lim

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} x^{1/n}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

Posons : $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{x}(x)^{1/n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \geq 1$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (x)^{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln x}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln x = 0$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x)^{\frac{1}{n}} = 1$

et par suite

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geq 1$

$$x^{(1/n)} \leq x$$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geq 1$.

$$|f_n(x)| = e^{-x}.\frac{(x)^{\frac{1}{n}}}{x} \leq e^{-x} = h(x)$$

Avec h est une fct positive et intégrable sur $[1,+\infty[$.

Par suite, d'après le th de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_1^{+\infty} g(x)\,dx$$
$$= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

D'où le résultat.

2) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

En effectuant le changement de variable $t = x^n$, on trouve.

$$dt = nx^{n-1}dx = n\,t^{\left(\frac{n-1}{n}\right)}dx$$

$$x = \sqrt[n]{t} \Rightarrow t^{\left(\frac{1-n}{n}\right)}dt = n\,dx$$

et $\begin{cases} x = 1 \\ x \to +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t \to +\infty \end{cases}$

et

$$\int_1^{+\infty} n\,e^{-x^n}dx = \int_1^{+\infty} e^{-t}.t^{\left(\frac{1-n}{n}\right)}dt$$
$$= \int_1^{+\infty} e^{-t}.t^{\frac{1}{n}-1}\,dt$$
$$= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}.t^{\frac{1}{n}}\,dt$$

Finalement, d'après la qst précédente

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}(x)^{\frac{1}{n}}dx$$
$$= \int_1^{+\infty} e^{-x}/x\,dx$$

On trouve donc

$$I_{n+1} = \left[\frac{1}{2}x^{n+1} e^{-x^2}\right]_0^1 + \frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{-x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_{n+1} = -\frac{1}{2e} + \frac{n+1}{2} I_n}$$

Exercice 2.

- f cnt sur $[a, b]$
- g cnt par morceaux sur $[a, b]$ et positive.

Mq $\exists c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$

Posons

$m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ $\quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$

On a donc

$\forall x \in [a, b]$, $\quad m \leqslant f(x) \leqslant M$

or $\forall x \in [a, b]$ $\quad g(x) \geqslant 0$

D'où

$\forall x \in [a, b]$ $m\, g(x) \leqslant f(x)\, g(x) \leqslant M\, g(x)$

Par passage à l'intégration,

On trouve : $m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)\, g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$

- 1er cas : si $\int_a^b g(x)\, dx = 0$

si f garde son signe pas constant sur $[a, b]$ et son intégral est nul. $\int_a^b f(x)dx$
$\Rightarrow f$ est nulle

alors $\forall x \in [a, b]$: $g(x) = 0$

car g est positive sur $[a, b]$

Par suite, $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$

... ltat

- 2ème cas si $\int_a^b g(x)\, dx > 0$

alors

$$\left(\int_a^b \frac{f(x)\, g(x)}{\int_a^b g(x)}\right)$$

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} \leqslant M$$

Comme f est continue sur $[a, b]$, alors

$f([a, b]) = [m, M]$

Par suite, d'après (T.V.I) le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists c \in [a, b] : \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)dx}{\int_a^b g(x)} = f(c)$$

D'où le résultat.

27.05.2021

Exercice V :

$\sup |f(x)| = \sup |f(-x)|$

ssi $x \in [-a, a]$

- On a $\sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| = \sup_{x \in [-1,1]} |f(-x)| = M$

car $[-1, 1]$ est symétrique

Par suite

$$\left|\int_{-1}^1 f(x) + x^2 f(-x)dx\right| \leqslant \int_{-1}^1 |f(x) + x^2 f(-x)| dx$$

$$\leqslant \int_{-1}^1 (|f(x)| + x^2 |f(-x)|)\, dx$$

$$\leqslant \int_{-1}^1 (1 + x^2) M\, dx$$

$$\leqslant M \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1$$

$$\leqslant M \left(1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$\leqslant \frac{8}{3} M$$

Finalement

$$\left|\int_{-1}^1 f(x) + x^2 f(-x)dx\right| \leqslant \frac{8}{3} M$$

Exercice 1

Calculons les intégrales suivantes

• $I = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 e^{xy}\, dy \right) dx$

$I = \int_0^1 x \left(\int_0^x x e^{xy}\, dy \right) dx$

$= \int_0^1 x \left[e^{xy} \right]_{y=0}^{y=x} dx$

$= \int_0^1 x \left(e^{x^2} - 1\right) dx$

$= \int_0^1 x e^{x^2} dx - \int_0^1 x\, dx$

$= \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1$

$= \left[\frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}(e-2)$

• $K = \int_1^a \left(\int_1^b xy\, e^{x+y}\, dy \right) dx$

$= \int_1^a \left(\int_1^b (x e^x)(y e^y)\, dy \right) dx$

$= \int_1^a x e^x \left(\int_1^b y e^y dy \right) dx$

$= \left(\int_1^b y e^y\, dy \right) \cdot \left(\int_1^a x e^x\, dx \right)$

Calculons $\int_1^a x e^x dx$ en utilisant une intégration par parties.

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

On trouve

$\int_1^a x e^x dx = \left[x e^x \right]_1^a - \int_1^a e^x dx$

$= \cancel{[xe^x]} \left[x e^x - e^x \right]_1^a$

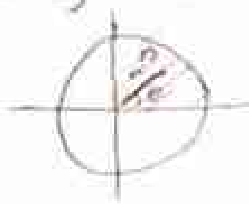
$= \left[e^x (x-1) \right]_1^a = e^a (a-1)$

On en déduit donc

$K = e^a(a-1) \cdot e^b(b-1)$

$= e^{a+b}(a-1)(b-1)$

• $L = \iint_D x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$ $\qquad x^2+y^2 \leq$



~~En coordo~~

En utilisant les coordonnées polaires, on pose

$x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

On a donc

$(x,y) \in D \iff \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Big/ \; 0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Par suite,

$L = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^2 \cos^2\theta \cdot \sqrt{1-r^2}\, r\, dr\, d\theta$

$= \left(\int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2}\, dr \right) \times \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta \right)$

$= L_1 \times L_2$

- On a $L_1 = \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2}\, dr$

En utilisant une intégration par parties

On pose

$\begin{cases} u(r) = r^2 \\ v'(r) = r\sqrt{1-r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(r) = 2r \\ v(r) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1-r^2)^{3/2} \end{cases}$

Alors on a :

$L_1 = \underbrace{\left[-\frac{1}{3} r^2 (1-r^2)^{3/2} \right]_0^1}_{=0} + \frac{2}{3} \int_0^1 r (1-r^2)^{3/2} dr$

$= \frac{2}{3} \times \frac{-1}{2} \times \frac{2}{5} \left[(1-r^2)^{5/2} \right]_0^1$

$= \frac{2}{15}$

- On a $L_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\, d\theta$

$= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

Donc on trouve :

$$L = \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{15} = \frac{\pi}{30}$$

• $M = \iint \frac{y}{1+x^2} \, dx \, dy$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{1+x^2} \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1-x^2}{2(1+x^2)} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2-(1+x^2)}{(1+x^2)} \, dx$$

$$= \frac{2}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 1 \, dx$$

$$= \left[\arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Exercice 2

1) Montrons que $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{e^x \cos^2 y + e^{-x} \sin^2 y} \, dy = \arctan(e^{-x})$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{1}{e^x \cos^2 y \left(1 + (e^{-x} \tan y)^2\right)} \, dy$$

$$= \left[\arctan\left(e^{-x} \tan(y)\right) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \arctan(e^{-x})$$

2) En déduire que $\int_{-1}^1 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{e^x \cos^2 y + e^{-x} \sin^2 y} \, dy \, dx = \pi$

On en déduit donc :

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{e^x \cos^2 y + e^{-x} \sin^2 y} \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 \arctan(e^{-x}) \, dx$$

$$\left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \int_{-1}^0 \arctan(e^{-x}) \, dx + \int_0^1 \arctan(e^{-x}) \, dx$$

en utilisant le changement de variable

$t = -x$, on trouve

$dt = -dx$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

On trouve $\int_{-1}^0 \arctan(e^{-x}) \, dx$

$$= \int_1^0 \arctan(e^t)(-dt)$$

$$= \int_0^1 \arctan(e^t) \, dt$$

$$= \int_0^1 \arctan(e^x) \, dx$$

Lorsque f est dérivable par rapport à y sur $[0,+\infty[$, et la fct $\beta(y) = y$ est dérivable sur $[0,+\infty[$, alors :

I est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Calculons $I'(y)$.

Sa dérivée est donnée par

$$I'(y) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \beta'(y)\, f(\beta(y), y) + \alpha'(y)\, f(\alpha(y), y)$$

$\iff$

$$I'(y) = \int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\,dx + f(y,y)$$

$$= \int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\,dx + \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2}$$

b- Montrons que $I'(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y \arctan y}{(1+y^2)}$

Cherchons les facteurs a, b et c tq

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{ax+b}{1+x^2} + \frac{c}{1+xy}$$

On multiplie par $(1+xy)$ ... et on remplace x par $-1/y$

Multiplions la formule par $(1+xy)$ et remplaçons x par $(-1/y)$.

On :

$$\frac{x}{1+x^2} = \left(\frac{ax+b}{1+x^2}\right)(1+xy) + c$$

$$\Rightarrow c = \frac{-1/y}{1+(1/y)^2} = \frac{-y}{y^2+1}$$

On fait la même chose pour trouver a et b

Multiplions la formule par $(1+x^2)$

On :

$$\frac{x}{1+xy} = ax+b + \frac{c}{(1+xy)}\cdot(1+x^2)$$

Remplaçons x par i et $-i$:

$$\begin{cases} \frac{i}{1+iy} = ai+b \\ \frac{-i}{1-iy} = -ai+b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{i}{1+iy} = ai+b \\ \left(\frac{i}{1+iy} - \frac{i}{1-iy}\right) = 2b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{i}{1+iy} = ai+b \\ \frac{-2i^2y}{1+y^2} = 2b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ai = \frac{i}{1+iy} - \frac{y}{1+y^2} \\ \frac{y}{1+y^2} = b \end{cases} \quad \cdot(-i)$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{1}{1+iy} + \frac{iy}{1+y^2} \\ b = \frac{y}{1+y^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{1+y^2+iy-y^2}{(1+iy)(1+y^2)} = \frac{1}{1+y^2} \\ b = \frac{y}{1+y^2} \end{cases}$$

Finalement :

$$a = \frac{1}{1+y^2},\quad b = \frac{y}{1+y^2} \quad \text{et} \quad c = \frac{-y}{1+y^2}$$

On a trouvé

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{1}{(1+y^2)}\cdot\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{y}{(1+y^2)}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{y}{(1+y^2)} \times \frac{1}{1+xy}$$

Par suite,

$$\int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\,dx = \frac{1}{(1+y^2)}\int_0^y \frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{y}{(1+y^2)}\int_0^y \frac{1}{1+x^2}\,dx - \frac{y}{(1+y^2)}\int_0^y \frac{y}{1+xy}$$

b) Etablir l'égalité

$\forall K \in \mathbb{N}^*, \; I_{k+1} - I_k = \frac{1}{4k^2}$

Calculons $I_{k+1} - I_k$

Soit $k \geq 1$ on a :

$$I_{k+1} - I_k = \int_0^1 f_{k+1}(x)\,dx - \int_0^1 f_k(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (f_{k+1}(x) - f_k(x))\,dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(x)(x^{2k+2} - x^{2k})\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{2k+1}\varphi(x)\,x(1-x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{2k+1} \cdot \frac{x \ln x}{x^2-1} \cdot (1-x^2)\,dx$$

$$= -\int_0^1 x^{(2k+1)} \ln x \, dx$$

En utilisant une intégration par partie.

On pose :

$$\begin{cases} U(x) = \ln(x) \\ V'(x) = x^{2k+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 1/x \\ V(x) = \frac{x^{2k}}{2k} \end{cases}$$

et on obtient :

$$I_{k+1} - I_k = -\left(\left[\frac{x^{2k}\ln x}{2k}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2k-1}}{2k}\,dx\right)$$

Or $\lim_{x \to 0^+} x^{2k}\ln x = 0$

D'où

$$I_{k+1} - I_k = \int_0^1 \frac{x^{2k-1}}{2k}\,dx$$

$$= \frac{1}{4k^2}\left[x^{2k}\right]_0^1$$

$$I_{k+1} - I_k = \frac{1}{4k^2}$$

En déduire que $I_n = \frac{1}{4}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Par sommation terme à terme pour k tel que $n \leq k \leq N$, on trouve :

$$I_{N+1} - I_n = \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{4k^2}$$

Par passage à la limite :

$N \to +\infty$, on obtient :

$$I_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{4k^2}$$

Exercice :

Soit $x, y \in [0, +\infty[^2$, $f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}$

1) Etudions la dérivabilité de f/y sur $[0,+\infty[$

Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

Posons $U(y) = 1 + xy \quad \forall y \geq 0$

On a donc :

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \ln \circ U(y)$$

(*) U est dérivable sur $[0,+\infty[$ car c'est une fonction affine (polynomiale)

(**) $U([0,+\infty[) = [1,+\infty[$
$\subset]0,+\infty[$ car $y \geq 0$

(***) La fct $\ln$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

D'où la fct $\ln \circ U$ est dérivable sur $[0,+\infty[$

Par suite, la fct f est dérivable par rapport à y sur $[0,+\infty[$.

Calculons $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{U'(y)}{U(y)}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{1+xy}$$

2) Posons

$$I(Y) = \int_0^Y f(x,y)\,dx$$

a. Montrons que I est dérivable sur $[0,+\infty[$

Exercice 8

1) Mq $\lim\limits_{u\to 0^+}\int_0^{\pi/2} e^{-u\sin x}dx = \frac{\pi}{2}$

D'après l'encadrement donné, on déduit que
$\forall t\geq 0 \quad 1-t\leq e^{-t}\leq 1$

Comme $t\to 0^+$, alors $u\geq 0$

De plus $x\in[0,\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin x\geq 0$

D'où $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et pour $u\to 0^+$ on a :

$u\sin x\geq 0$

Par suite : $1-u\sin x\leq e^{-u\sin x}\leq 1$

Par passage à l'intégration, on trouve :

$\frac{\pi}{2}-u\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\leq\int_0^{\pi/2} e^{-u\sin x}dx\leq\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}+u[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}\leq\int_0^{\pi/2} e^{-u\sin x}dx\leq\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}-u\leq\int_0^{\pi/2} e^{-u\sin x}dx\leq\frac{\pi}{2}$

Il en résulte que :

$\frac{\pi}{2}-u\leq\int_0^{\pi/2} e^{-u\sin x}dx\leq\frac{\pi}{2}$

D'après le théorème d'encadrement des limites, puisque :

$\lim\limits_{u\to 0^+}(\frac{\pi}{2}-u) = \lim\limits_{u\to 0^+}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

alors $\lim\limits_{u\to 0^+}\int_0^{\pi/2} e^{-u\sin x}dx = \frac{\pi}{2}$

2) Mq $\lim\limits_{u\to 0^+}\int_u^{3u}\frac{\cos x}{x}dx = \ln 3$

Puisque $u\to 0^+$

alors $[u,3u]\subset[0,\frac{\pi}{2}]$

Or la fct $\cos x$ est décroissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Par suite elle est décroissante sur $[u,3u]$

D'où $\forall x\in[u,3u]$,

$\cos(3u)\leq\cos x\leq\cos(u)$

$\Rightarrow \forall x\in[u,3u]$

$\frac{\cos(3u)}{x}\leq\frac{\cos x}{x}\leq\frac{\cos(u)}{x}$

Par passage à l'intégration, on trouve

$\int_u^{3u}\frac{\cos(3u)}{x}dx\leq\int_u^{3u}\frac{\cos(x)}{x}dx\leq\int_u^{3u}\frac{\cos(u)}{x}dx$

$\Rightarrow$

$\cos(3u)[\ln x]_u^{3u}\leq\int_u^{3u}\frac{\cos x}{x}dx\leq\cos u\,[\ln x]_u^{3u}$

$\ln 3\cos(3u)\leq\int_u^{3u}\frac{\cos x}{x}dx\leq\ln 3\cos(u)$

Puisque

$\lim\limits_{u\to 0^+}\ln 3\cos(3u) = \lim\limits_{u\to 0^+}\ln(3)\cos(u) = \ln(3)$

Alors, d'après le théorème d'encadrement des limites :

On a

$\lim\limits_{u\to 0^+}\int_u^{3u}\frac{\cos x}{x}dx = \ln 3$

$= \dfrac{1}{1+y^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^y + \dfrac{y}{1+y^2}\left[\text{Arctan}(x)\right]_0^y$

$- \dfrac{1}{1+y^2}\left[\ln|1+xy|\right]_0^1$

$= \dfrac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \dfrac{y\,\text{Arctan}(y)}{1+y^2} - \dfrac{\ln(1+y^2)}{1+y^2}$

On en déduit donc

$I'(y) = \dfrac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \dfrac{y\,\text{Arctan}(y)}{1+y^2} \quad \forall y \geq 0$

3) Montrons que $\int_0^y \dfrac{t\,\text{Arctan}\,t}{1+t^2}$ - - -

En utilisons une intégration par partie.

On pose. $\begin{cases} U(t) = \text{Arctan}\,t \\ V'(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ V(t) = \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) \end{cases}$

Et on trouve.

$\int_0^y \dfrac{t\,\text{Arctan}\,t}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\,\text{Arctan}\,t\right]_0^y -$

$- \dfrac{1}{2}\int_0^y \dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,dt$

$= \left(\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\,\text{Arctan}\,y\right) - \frac{1}{2}\int_0^y \dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,dt$

4) En déduire $I(y)$.

Comme $I(0) = 0$,

Alors, $I(y) = \int_0^y I'(t)\,dt$

$= \int_0^y \dfrac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)}\,dt + \int_0^y \dfrac{t\,\text{Arctan}\,t}{1+t^2}\,dt$

et d'après la qst précédente, on trouve.

$I(y) = \dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)\,\text{Arctan}\,y$

5) Donnons la valeur de $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$

D'après ce qui précède, $\forall y \geq 0$

$\int_0^y \dfrac{\ln(1+xy)}{1+x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)\,\text{Arctan}\,y$

Donc pour $y = 1$, on trouve.

$\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \dfrac{\pi}{8}\ln(2)$

3) $C = \lim_{u \to +\infty} \int_0^{\pi} e^{-u \sin x}\, dx$

a) Mq $\int_0^{\pi} e^{-u\sin x}\, dx = 2\int_0^{\pi/2} e^{-u \sin x}\, dx$

On

$$\int_0^{\pi} e^{-u\sin x}\, dx = \int_0^{\pi/2} e^{-u \sin x} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-u\sin x} dx$$

Il suffit donc de montrer que:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-u\sin x} dx = \int_0^{\pi/2} e^{-u\sin x} dx$$

En effectuant le changement de variable.

$t = \pi - x$.

On trouve

$dt = -dx$

$$\begin{cases} x = \pi/2 \\ x = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \pi/2 \\ t = 0 \end{cases}$$

et $\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-u\sin x} dx = \int_{\pi/2}^{0} e^{-u\sin(\pi - t)} (-dt)$

$\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-u\sin x} dx = \int_0^{\pi/2} e^{-u\sin(\pi - t)} dt$

Or, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - t) = \sin(t)$

D'où $\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-u\sin x} dx = \int_0^{\pi/2} e^{-u\sin x} dx$

b) Mq $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$

C'est l'étude de la fct $\sin x - \frac{2}{\pi}x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

c) Mq (C) $\lim_{u \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u\sin x} dx = 0$

$\forall u$

encadrement

On d'après (b) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$

Donc $\forall u \geq 0$ $\quad u\sin x \geq \frac{2}{\pi} x u$

$\forall x \in$ (il suffit $u \to 0^+$)

$-u\sin x \leq -\frac{2}{\pi} x u$

Comme la fct e est croissante sur $\mathbb{R}$ partout et

alors

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; $\forall u \geq 0$

$$0 \leq e^{-u\sin x} \leq e^{-\frac{2}{\pi} x u}$$

Par passage à l'intégration, on trouve

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} e^{-u\sin x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}ux} dx$$

$\Leftrightarrow$

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} e^{-u\sin x} dx \leq -\frac{\pi}{2u}\left[e^{-\frac{2}{\pi}x u}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$\Leftrightarrow$

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} e^{-u\sin x} dx \leq \frac{\pi}{2u}(e^{-u} - 1)$$

D'après le théorème d'encadrement des limites.

Puisque $\lim_{u \to +\infty} \frac{\pi}{2u}(e^{-u} - 1) = 0$

alors $\lim_{u \to +\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-u\sin x} dx = 0$

D'où $C = 0$

TD2

Exercice 1

$y_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^n} \, dx$

Posons $f_n(x) = e^{-x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$

On a :

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/e & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

D'une ~~autre~~ part

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [0, 1]$

$$|f_n(x)| = e^{-x^n} \leq 1.$$

D'une autre part.

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \geq 1 : \quad x^n \geq x$

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 1 : \quad -x^n \leq -x$

Or la fct exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \geq 1$: on a $e^{-x^n} \leq e^{-x}$

On en déduit donc

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [0, +\infty[$

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

Avec

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[\\ e^{-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

~~...~~ et une fct positive et intégrable sur $[0, +\infty[$.

En appliquant le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx$$

$$= \int_0^1 1 \, dx = 1$$

Exercice 2

$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue bornée

• $I_n = \int_0^1 f(x^n) \, dx$

On a

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}^+$ alors

$$h(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x^n) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x \in [0, 1[\\ f(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

D'une autre part, f est une fct bornée sur $\mathbb{R}^+$, donc

$\exists M \geq 0$ tq : $\forall y \in \mathbb{R}^+ : |f(y)| \leq M$

Par suite $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [0, 1]$

$$|f(x^n)| \leq M = g(x)$$

Avec, g est une fct positive et intégrable sur $[0, 1]$.

D'où d'après le th de la convergence dominée,

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^1 h(x) \, dx$$

$$= \int_0^1 f(0) \, dx$$

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = f(0)$$

• $J_n = \int_0^{+\infty} n f(x) e^{-nx} \, dx$

En utilisant le changement de variable $t = nx$,

on trouve

$$dt = n \, dx$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x \to \infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t \to +\infty \end{cases}$$

et

$$J_n = \int_0^{+\infty} n f(x) e^{-nx} \, dx = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-t} \, dt$$

Exercice 4.

Pour $(x,n) \in]0,1[\times \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2-1} x^{2n+1}, \quad I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \text{ et}$$

$$\varphi(x) = \frac{x \ln x}{x^2-1}$$

1) Montrons que $\varphi(x)$ est intégrable sur $]0,1[$.

a) Calculons $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x)$.

On a $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x^2-1}$

Or $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

Alors : $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = 0$

Par suite φ est prolongeable par continuité en 0^+.

D'où φ est intégrable à droite en 0.

b) Calculons $\lim_{x\to 1^-} \varphi(x)$.

On a $\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x\ln x}{x^2-1}$

$$= \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{\ln x}{(x-1)}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

Or $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = 1$.

Alors $\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = 1/2$

Par suite, φ est prolongeable par continuité en 1^-. D'où φ est intégrable à gauche en 1.

Finalement φ est intégrable sur $]0,1[$

10.06.2021

2) En déduire que f_n est intégrable sur $]0,1[$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2-1} x^{2n+1}$

$= \varphi(x) \cdot x^{2n}$

$\forall x \in]0,1[$

Comme $\forall x \in]0,1[$ $|x^{2n}| \leq 1$ et $\varphi \geq 0$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ (*)

Or φ est intégrable sur $]0,1[$

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est intégrable sur $]0,1[$

Autrement $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est le produit d'une fct intégrable sur $]0,1[$ et une fct continue sur $[0,1]$ qui est un intervalle fermé borné.

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est intégrable sur $]0,1[$

3) Montrons que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

On a clairement.

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ (car $\forall x \in]0,1[$ $\lim_{n\to+\infty} x^{2n} = 0$.)

De plus la suite f_n satisfait la condition de domination (voir (*))

Par suite, d'après le théorème de la convergence dominée.

$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

D'où le résultat.